□39□ □□□□□□□□□□□□□□□

1□□□□□ x □□□□ $\frac{e^x}{x^3}-x-alnx\geq 1$ □□□□ $x\in(1,+\infty)$ □□□□□□□ a □□□□□

□□□□□□□□□□ $\frac{e^x}{x^3}-x-alnx\geq 1$ □□□□ $x\in(1,+\infty)$ □□□□

□□ $a\leq\frac{x^{-3}e^x-x-1}{lnx}$ □

□ $f(x)=\frac{x^{-3}e^x-x-1}{lnx}$ □ $x>1$ □

□□□□□□ $a\leq f(x)_{min}$ □

□ $g(x)=e^x-x-1$ □□ $g'(x)=e^x-1$ □

□ $x>0$ □□ $g'(x)>0$ □ $g(x)$ □□□□□□ $x<0$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □□□□□

□ $g(x)\geq g(0)=0$ □□ $e^x-1\geq x$ □□□□□ $x=0$ □□□□□

□ $f(x)=\frac{x^{-3}e^x-x-1}{lnx}=\frac{e^{x-3lnx}-1-x}{lnx}\geq\frac{x-3lnx+1-1-x}{lnx}=-3$ □□ $x-3lnx=0$ □□□□□

□ $\frac{lnx}{x}=\frac{1}{3}$ □

□ $h(x)=\frac{lnx}{x}$ □□ $h'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}$ □

□□□□□ $(0,e)$ □□□□□□□ $(e,+\infty)$ □□□□□□

□ $x\to 0$ □□ $h(x)\to-\infty$ □□ $x\to+\infty$ □□ $h(x)\to 0$ □ h□1□$=0$□

□ h□e□ $=\frac{1}{e}<\frac{1}{3}$ □□ $y=\frac{1}{3}$ □ $h(x)$ □□□□□□□

□□□□□□□

□□ $a \leqslant -3$ □

□□□□□ $\{a|a \leqslant -3\}$ □

2□□□□ $f(x)=a^{x}-x^{a}(x>0,a>1)$ □

□1□□□□ $\forall x\in(0,+\infty)$ □□□ $\ln x<\sqrt{x}$ □

□2□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□ $f(x)$ □□□□

□□□□□1□□□□□ $h(x)=\ln x-\sqrt{x}$ □ $x>0$ □□ $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$ □

□ $h'(x)>0$ □□□ $0<x<4$ □□ $h'(x)<0$ □□□ $x>4$ □

□□ $h(x)$ □ $(0,4)$ □□□□□□□ $(4,+\infty)$ □□□□□□

□□ $h(x)$ □□□□□ h □4□ $=\ln 4-2=2(\ln 2-1)<0$ □

□□ $h(x)<0$ □

□□ $\forall x\in(0,+\infty)$ □□□ $\ln x<\sqrt{x}$ □

□2□□□□ $f(x)=0$ □□ $a^{x}=x^{a}$ □□ $x\ln a=a\ln x$ □□□ $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$ □

□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□ $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$ □□□□□

□ $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ □□ $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^{2}}$ □□ g □a□ $=\frac{\ln a}{a}$ □

□□ $g(x)$ □ $(0,e)$ □□□□□□□ $(e,+\infty)$ □□□□□□

□□□ g □1□ $=0$ □□□□1□□ $\frac{\ln x}{x}<\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ □

□□ $x\to+\infty$ □ $g(x)\to 0$ □

□□ $a=e$ □□ $g(x)=g$ □a□□□□□□□□□

□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□ $a=e$ □□□ $f(x)=e^x-x^e$ □

□□ $f'(x)=e^x-ex^{e-1}=e(e^{x-1}-x^{e-1})$ □

□ $\varphi(x)=x-1-(e-1)lnx$ □□ $\varphi'(x)=1-\frac{e-1}{x}=\frac{x-(e-1)}{x}$ □

□□ $\varphi(x)$ □ $(0,e-1)$ □□□□□□□ $(e-1,+\infty)$ □□□□□□

φ □1□ $=\varphi$ □e□ $=0$ □

□□□ $x\in(0,1)$ □□ $\varphi(x)>0$ □□ $x\in(1,e)$ □□ $\varphi(x)<0$ □□ $x\in(e,+\infty)$ □□ $\varphi(x)>0$ □

□□□ $x\in(0,1)$ □□ $x-1>(e-1)lnx$ □□ $e^{x-1}>x^{e-1}$ □□ $f'(x)>0$ □

□□□□□□ $x\in(1,e)$ □□ $f'(x)<0$ □□ $x\in(e,+\infty)$ □□ $f'(x)>0$ □

□□ $x=1$ □ $x=e$ □□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□

□□ $a=e$ □□ $f(x)$ □□□□□ $e-1$ □□□□□ 0□

3□□□□□ $f(x)=ln(1+x)-\frac{ax}{x+1}(a>0)$ □

□1□□ $x=1$ □□□ $f(x)$ □□□□□□□□ a □□□

□2□□ $f(x)\ldots0$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□□ a □□□□□□

□3□□□□ $(\frac{2019}{2020})^{2020}<\frac{1}{e}$ □□□□□□□□□□□

□□□□□□□1□□□ $f(x)=ln(x+1)-\frac{ax}{x+1}(a>0)$ □□□ $f'(x)=\frac{x+1-a}{(x+1)^2}$ $(a>0)$ □

□□ $x=1$ □□□ $f(x)$ □□□□□□□□ f' □1□ $=0$ □□ $a=2$ □□ $a=2$ □□□□□□ $x=1$ □□□ $f(x)$ □□□□□□□□□ $a=2$ □

□2□□□ $f(x)\ldots0$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□□□ $f(x)_{min}\ldots0$ □

□$0<a\leqslant 1$□□ $f(x)=\frac{x+1-a}{(x+1)^2}\geqslant 0$ □$[0$□$+\infty)$□□□□□ $f(x)$ □$[0$□$+\infty)$□□□□□

□□ $f(x)_{min}=f(0)=0$ □□□□$0<a\leqslant 1$ □□□□

□ $a>1$□□□ $f'(x)=\frac{x+1-a}{(x+1)^2}>0$ □□ $x>a-1$□□ $f'(x)=\frac{x+1-a}{(x+1)^2}<0$ □□ $0<x<a-1$□

□ $f(x)$ □ $(0,a-1)$□□□□□□□$(a-1,+\infty)$ □□□□□□$\in(0,a-1)$□□ $f(x)<f(0)=0$□□□ $f(x)\geqslant 0$ □□□□□□□□a□□□□

□□$(0$□$1]$□

□3□□□ $(\frac{2019}{2020})^{2020}<\frac{1}{e}$□□□□ $(\frac{2020}{2019})^{2020}>e$ □□□□□□□□□□ $2020\ln\frac{2020}{2019}>1$ □

□□□□□ $\ln\frac{2020}{2019}>\frac{1}{2020}$ □□□□□□ $\ln\frac{2020}{2019}-\frac{1}{2020}>0$ □□□□□□

$\ln(1+\frac{1}{2019})-\frac{1}{1+2019}>0$ □□ $a=1$□□ $f(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$ □$(0,+\infty)$ □□□□□

□$\frac{1}{1+2019}>0$ □ $f(0)=0$□

$$f(x)=\ln(1+\frac{1}{2019})-\frac{\frac{1}{2019}}{1+\frac{1}{2019}}=\ln\frac{2020}{2019}-\frac{1}{2020}>f(0)=0$$

□□□□□□□□□

4□□□□□ $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+ax}$□□□ $a\in(0$□$1]$□

□1□□□□□ $f(x)$ □□□$[0$□$1]$□□□□□□

□2□□□□ $(\frac{2021}{2020})^{2020.4}<e<(\frac{2021}{2020})^{2020.5}$ □

□□□□□□□1□ $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(ax+1)^2}=\frac{a^2x}{(x+1)(ax+1)^2}\cdot(x-\frac{1-2a}{a^2})$ □

□ $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$ □ $0<x<1$□□ $f'(x)>0$□□□ $f(x)$ □$[0$□$1]$□□□□□

□ $\frac{1-2a}{a^2}>1 \Leftrightarrow a^2+2a-1<0 \Leftrightarrow 0<a<\sqrt{2}-1$ □

□ $0<x<1$ □□ $f'(x)<0$ □□□ $f(x)$ □ $[0$ □ $1]$ □□□□□

□ $\sqrt{2}-1<a<\frac{1}{2}$ □□□ $0<x<\frac{1-2a}{a^2}$ □□ $f'(x)<0$ □

□ $\frac{1-2a}{a^2}<x<1$ □□ $f'(x)>0$ □

□□ $f(x)$ □ $(0,\frac{1-2a}{a^2})$ □□□□□□ $(\frac{1-2a}{a^2},1)$ □□□□□

□2□□□□ $(\frac{2021}{2020})^{2020.4}<e<(\frac{2021}{2020})^{2020.5}$ □

□ $(1+\frac{1}{2020})^{2020+0.4}<e<(1+\frac{1}{2020})^{2020+0.5}$ □

□□□□□□ $(1+\frac{1}{n})^{n+0.4}<e<(1+\frac{1}{n})^{n+0.5}(n\in N_+)$ □

□ $(1+\frac{1}{n})^{n+0.4}<e<(1+\frac{1}{n})^{n+0.5} \Leftrightarrow (n+0.4)ln(1+\frac{1}{n})<1<(n+0.5)ln(1+\frac{1}{n})$

□□1□□□□ $a=\frac{1}{2}$ □ $f(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□ $f(x)\geqslant f(0)=0$ □

□ $ln(1+x)\geqslant\frac{x}{1+0.5x}$ □

□ $x=\frac{1}{n}$ □□□ $(n+0.5)ln(1+\frac{1}{n})>1$ □□ $(1+\frac{1}{n})^{n+0.5}>e$ □

□□1□□□□ $a=0.4$ □ $f(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□ $f(x)\leqslant f(0)=0$ □

□ $ln(1+x)\leqslant\frac{x}{1+0.4x}$ □

□ $x=\frac{1}{n}$ □□□ $(n+0.4)ln(1+\frac{1}{n})>1$ □□ $(1+\frac{1}{n})^{n+0.4}<e$ □

□□□□ $\forall n\in N_+$ □ $(1+\frac{1}{n})^{n+0.4}<e<(1+\frac{1}{n})^{n+0.5}$ □□□□

□□ $(\frac{2021}{2020})^{2020.4}<e<(\frac{2021}{2020})^{2020.5}$ □

5□□□□□ $f(x)=ln(1+x)-\frac{ax}{x+1}(a>0)$ □

□1□□□□□ $x=1$ □□□□□ x □□□□□ a □□□

□2□□ $f(x)\geq 0$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□□ a □□□□□□

□3□□□□ $(\frac{2016}{2017})^{2017}<\frac{1}{e}($ e □□□□□□□□□□

□□□□□□□1□ $f(x)=ln(1+x)-\frac{ax}{x+1}$ □ $(a>0)$ □

$\therefore f'(x)=\frac{x+1-a}{(x+1)^2}$ □ f' □1□ $=0$ □□ $a=2$ □

□2□ $f(x)\geq 0$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□ $\therefore f(x)_{min}\geq 0$ □

□ $0<a\leq 1$ □□ $f'(x)\geq 0$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□□ $f(x)$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□□

$\therefore f(x)_{min}=f(0)=0$ □□□□ $0<a\leq 1$ □

□ $a>1$ □□□ $f'(x)\geq 0$ □□ $x>a-1$ □□ $f'(x)<0$ □□ $0\leq x<a-1$ □

□ $f(x)$ □ $[0$ □ $a-1)$ □□□□□□□ $(a-1,+\infty)$ □□□□□□

$\therefore f(x)_{min}=f(a-1)\geq 0$ □□ $ff(0)=0>\quad(a-1)$ □□□□□

□□□ a □□□□□□ $(0$ □ $1]$ □

□3□□□ $(\frac{2016}{2017})^{2017}<\frac{1}{e}$ □□□□ $(\frac{2017}{2016})^{2017}>e$

□□□□□□□□□ $2017ln\frac{2017}{2016}>1$ □□□ $ln\frac{2017}{2016}>\frac{1}{2017}$ □

□□ $ln\frac{2017}{2016}-\frac{1}{2017}>0$ □□□ $ln(1+\frac{1}{2016})-\frac{1}{1+2016}>0$ □

□□2□□ $a=1$ □□ $f(x)=ln(1+x)-\frac{x}{x+1}$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□

□ $\frac{1}{1+2016}>0$ □ $f(0)=0$ □

□□ $f(\frac{1}{2016})=n(1+\frac{1}{2016})-\frac{1}{1+2016}>f(0)=0$ □

□□ $(\frac{2016}{2017})^{2017} < \frac{1}{e}$ □□□

6□□□□□ $f(x)=ln(1+x)-\frac{ax}{x+1}(a>0)$ □□□ $:[ln(1+x)]'=\frac{1}{1+x})$

□1□□ $x=1$ □□□ $f(x)$ □□□□□□□ a □□□

□2□□ $f(x)\geqslant 0$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□□ a □□□□□□

□3□□□□ $(\frac{2014}{2015})^{2015} < \frac{1}{e}$ □

□□□□□□1□ □□ $f(x)=ln(1+x)-\frac{ax}{x+1}(a>0)$ □

$\therefore$ □□ $f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{a(x+1)-ax}{(x+1)^2}=\frac{x+1-a}{(x+1)^2}(a>0)$ □

□ $x=1$ □□□ $f(x)$ □□□□□□□

$\therefore f'$ □1□ $=\frac{2-a}{4}=0$

$\therefore a=2$ □ □2 □□

□2□ $f(x)\geqslant 0$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□

$\therefore f(x)_{min}\geqslant 0$ □ □3 □□

□ $0<a\leqslant 1$ □□ $f'(x)\geqslant 0$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□ $f(x)$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□ □4 □□

$\therefore f(x)_{min}=f(0)=0$ □□□

$\therefore 0<a\leqslant 1$ □5 □□

□ $a>1$ □□□ $f'(x)>0$ □□ $x>a-1$ □□ $f'(x)<0$ □□ $0\leqslant x<a-1$ □ □6 □□

□ $f(x)$ □ $[0$ □ $a-1)$ □□□□□□ $(a-1,+\infty)$ □□□□□

$\therefore f(x)_{min}=f(a-1)\geqslant 0$ □

□ $f(0)=0>(a-1)$ □□□□□

□□□ a □□□□□ $(0$□$1]\cdots$ □8 □□

□□□3□□□□ $(\frac{2014}{2015})^{2015}<\frac{1}{e}$ □□□□ $(\frac{2015}{2014})^{2015}>e$ □

□□□□□□□□□ $2015ln\frac{2015}{2014}>1$ □$\cdots$ □9 □□

□ $ln\frac{2015}{2014}>\frac{1}{2015}$ □

□ $ln\frac{2015}{2014}-\frac{1}{2015}>0$ □

□ $ln(1+\frac{1}{2014})-\frac{1}{1+2014}>0$ □$\cdots$ □11 □□

□□2□□ $a=1$ □□ $f(x)=ln(1+x)-\frac{x}{x+1}$ □ $[0$□$+\infty)$ □□□□□

□ $\frac{1}{1+2014}>0$ □ $f(0)=0$ □

$f(\frac{1}{2014})=ln(1+\frac{1}{2014})-\frac{1}{1+2014}>f(0)=0\cdots$ □13 □□

$\therefore(\frac{2014}{2015})^{2015}<\frac{1}{e}$ □□$\cdots$ □14 □□

7□□□□ $f(x)=(1-ax)ln(1+x)-x$ □□□ a □□□□

□1□□ $a\leqslant-\frac{1}{2}$ □□□ $f(x)$ □□□ $[0$□$1]$ □□□□□

□2□□□□ $(\frac{2021}{2020})^{2020+\frac{1}{2}}>e$ □

□□□□□□1□ $f'(x)=-aln(x+1)+\frac{1-ax}{x+1}-1$ □

$f''(x)=-\frac{a}{1+x}+\frac{-a(1+x)-(1-ax)}{(1+x)^2}=-\frac{ax+2a+1}{(1+x)^2}$ □

□ $a\leqslant-\frac{1}{2}$ □□□ $x\in[0$□$1]$ □□ $\therefore f''(x)>0$ □

□□ $f'(x)$ □$[0$□$1]$□□□□□ $f'(x)_{min}=f'(0)=0$□

□ $f'(x)\geqslant 0$□

□□ $f(x)$ □$[0$□$1]$□□□□□ $(x)_{min}=f(0)=0$□

□□□ $a\leqslant -\frac{1}{2}$ □□ $f(x)$ □□□$[0$□$1]$□□□□□0□

□2□□□□1□□□□□ $a=-\frac{1}{2}$ □□ $f(x)$ □□□0□

□□ $f(x)=(1-ax)ln(1+x)-x$□□ $x=\frac{1}{n}\in(0,1]$ □

□□□□□□□n□□ $(1+\frac{1}{2n})ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}>0$ □□ $ln(1+\frac{1}{n})>\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ □

□□ $ln(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}>1$ □

□□ $(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}>e$ □□□□

□ $n=2020$ □□ $(\frac{2021}{2020})^{2020\frac{1}{2}}>e$ □

8□□□□□ $f(x)=ln(1+x)-\frac{ax}{x+1}(a>0)$ □

□1□□ $x=1$ □□□ $f(x)$ □□□□□□□□ a □□□

□2□□ $f(x)\geqslant 0$ □$[0$□$+\infty)$ □□□□□□ a □□□□□□

□3□□□□ $(\frac{2017}{2016})^{2017}>e$ □□□□□□□□□□

□□□□□□□1□ □ $f(x)=ln(1+x)-\frac{ax}{x+1}(a>0)$ □

$\therefore f'(x)=\frac{x+1-a}{(x+1)^{2}}$ □

□ $x=1$ □□□ $f(x)$ □□□□□□□

f' □1□ $=0$ □ $a=2$ □

□2□□ $f(x)\geq 0$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□ $\therefore f(x)_{min}\geq 0$ □

□ $0<a\leq 1$ □□ $f'(x)\geq 0$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□

□ $f(x)$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□□

$\therefore f(x)_{min}=f(0)=0$ □□□□ $0<a\leq 1$ □

□ $a>1$ □□□ $f'(x)\geq 0$ □□ $x>a-1$ □

□ $f'(x)<0$ □□ $0\leq x<a-1$ □

□ $f(x)$ □ $[0$ □ $a-1)$ □□□□□□□ $(a-1,+\infty)$ □□□□□□

$\therefore f(x)_{min}=f(a-1)\geq 0$ □□ $ff(0)=0>\ (a-1)$ □□□□□

□□□ a □□□□□□ $(0$ □ $1]$ □

□3□□□□□□□□□□ $2017\times ln\frac{2017}{2016}>1\Leftrightarrow ln\frac{2017}{2016}>\frac{1}{2017}$ □

$\Leftrightarrow ln\frac{2017}{2016}-\frac{1}{2017}>0\Leftrightarrow ln(1+\frac{1}{2016})-\frac{1}{1+2016}>0$ □

□□2□□ $a=1$ □□ $f(x)=ln(1+x)-\frac{x}{x+1}$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□

□ $\frac{1}{1+2016}>0$ □ $f(0)=0$ □

$\therefore f(\frac{1}{2016})=ln\frac{1}{1+2016}-\frac{1}{1+2016}>f(0)=0$ □

□ $(\frac{2017}{2016})^{2017}>e$ □□□

9□□□□□ $f(x)=e^{g(x)}$ □ $g(x)=\frac{kx-1}{x+1}(e$ □□□□□□□□□

(1) 若函数 $g(x)$ 是 $(1,+\infty)$ 上的增函数，求 k 的取值范围.

(2) 若对任意的 $x>0$，都有 $f(x)<x+1$，求满足条件的最大整数 k 的值.

【解答】解：(1) 设 $g(x)=\frac{kx-1}{x+1}\Rightarrow g'(x)=\frac{k(x+1)-kx+1}{(x+1)^2}=\frac{k+1}{(x+1)^2}$，

因为 $g(x)$ 是 $(1,+\infty)$ 上的增函数，

所以 $g'(x)>0$，得到 $k>-1$；所以 k 的取值范围为 $(-1,+\infty)$

(2) 由条件得到 $f(1)<2\Rightarrow e^{\frac{k-2}{2}}<2\Rightarrow k<2\ln 2+1<3$ 猜测最大整数 $k=2$，

现在证明 $e^{\frac{2x-1}{x+1}}<x+1$ 对任意 $x>0$ 恒成立，$e^{\frac{2x-1}{x+1}}<x+1$ 等价于，

$2-\frac{3}{x+1}<(\ln x+1)\Leftrightarrow \ln(x+1)+\frac{3}{x+1}>2$，

设 $h(x)=\ln(x+1)+\frac{3}{x+1}\Rightarrow h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{x-2}{(x+1)^2}$

故 $x\in(0,2)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

所以对任意的 $x>0$ 都有 $h(x)\geqslant h(2)=\ln 3+1>2$，

即 $e^{\frac{2x-1}{x+1}}<x+1$ 对任意 $x>0$ 恒成立，

所以整数 k 的最大值为 2.

10. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$，$g(x)=\ln^2(1+x)-\frac{x^2}{1+x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 证明：$g(x)\leqslant 0$；

(3) 若不等式 $(1+\frac{1}{n})^{n+a}\leqslant e$ 对任意的 $n\in N^*$ 都成立（其中 e 是自然对数的底数）．求 a 的最大值.

□□□□□□1□□□ $f(x)$ □□□□□ $(-1,+\infty)$ □

$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$ □… □1 □□

□ $-1<x<0$ □□ $f'(x)>0$ □□ $x>0$ □□ $f'(x)<0$ □

□□□ $f(x)$ □□□□□ $(-1,0)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ … □2 □□

□2□□□□□□ $g(x)$ □□□□□ $(-1,+\infty)$ □

$g'(x)=\frac{2ln(1+x)}{1+x}-\frac{x^2+2x}{(1+x)^2}=\frac{2(1+x)ln(1+x)-x^2-2x}{(1+x)^2}$ □… □3 □□

□ $h(x)=2(1+x)ln(1+x)-x^2-2x$ □□ $h'(x)=2ln(1+x)-2x$ □

□□1□□□ $f(x)$ □ $(-1,0)$ □□□□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□ $f(x)$ □ $x=0$ □□□□□□□□ $f(0)=0$ □□□ $h'(x)<0(x\neq0)$ □… □4 □□

□□ $h(x)$ □ $(-1,+\infty)$ □□□□□□□ $h(0)=0$ □

□□□ $-1<x<0$ □□ $h(x)>h(0)=0$ □□ $x>0$ □□ $h(x)<h(0)=0$ … □5 □□

□□□□ $-1<x<0$ □□ $g'(x)>0$ □ $g(x)$ □ $(-1,0)$ □□□□□□

□ $x>0$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□ … □6 □□

□□ $g(x)$ □ $x=0$ □□□□□□□□ $g(0)=0$ □□□ $g(x)\leqslant 0$ … □7 □□

□3□□□□ $(1+\frac{1}{n})^{n+a}\leqslant e$ □□□□□□ $(n+a)ln(1+\frac{1}{n})\leqslant 1$ □… □8 □□

□ $1+\frac{1}{n}>1$ □□ $a\leqslant\frac{1}{ln(1+\frac{1}{n})}-n$ □… □9 □□

□ $G(x)=\frac{1}{ln(1+x)}-\frac{1}{x}, x\in(0,1]$ □

□ $G'(x)=-\frac{1}{(1+x)ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{(1+x)ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)ln^2(1+x)}$ □… □10 □□

□□I□□□ $ln^2(1+x)-\frac{x^2}{1+x}\leqslant 0$ □□ $(1+x)ln^2(1+x)-x^2\leqslant 0$ □

□□ $G'(x)<0$ □ $x\in(0$ □ $1]$ □□□ $G(x)$ □ $(0$ □ $1]$ □□□□□□

□□□ $G(x)$ □ $(0$ □ $1]$ □□□□□□ $G(1)=\frac{1}{ln2}-1$ □… □11 □□

□□ a □□□□□ $\frac{1}{ln2}-1$ □ … □12 □□

11□□□□□ $f(x)=ax+lnx+1$ □

□1□□ $f(x)$ □□□□□□

□2□□□□□ $f(x)$ □□□□□□

□3□□□□□ $x>0$ □ $f(x)\leqslant xe^{2x}$ □□□□□□□ a □□□□□□

□□□□□□□1□ $f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □ $f'(x)=a+\frac{1}{x}$ □

① $a\geqslant 0$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□

② $a<0$ □□□ $f'(x)>0$ □□□□ $0<x<-\frac{1}{a}$ □□ $f'(x)<0$ □□□□ $x>-\frac{1}{a}$ □

□ $f(x)$ □ $(0,-\frac{1}{a})$ □□□□ $(-\frac{1}{a}$ □ $+\infty)$ □□□

□2□□□ $f(x)=ax+lnx+1$ □

□ $f(x)=0$ □□□ $-a=\frac{lnx+1}{x}$ □ $x>0$ □

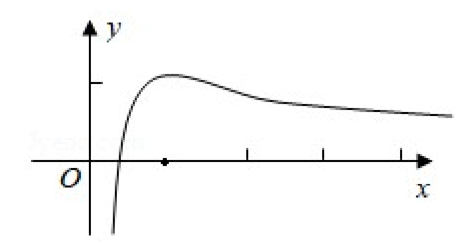
□ $g(x)=\dfrac{lnx+1}{x}$ □ $x>0$ □

$g'(x)=\dfrac{-lnx}{x}$ □

□ $x>1$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □□□

□ $0<x<1$ □□ $g'(x)>0$ □ $g(x)$ □□□

□□ $x=1$ □ $g(x)$ □□□□□ 1□□□□□□



□ $-a\le 0$ □ $-a=1$ □□ $a\ge 0$ □ $a=-1$ □□□□ $y=-a$ □ $y=g(x)$ □□□□□□

□ $0<-a<1$ □ $-1<a<0$ □□□□ $y=-a$ □ $y=g(x)$ □□□□□□

□ $-a>1$ □ $a<-1$ □□□□ $y=-a$ □ $y=g(x)$ □□□□□

□□□□□ $a<-1$ □□□ $f(x)$ □□□□□□ 0□

$-1<a<0$ □□□ $f(x)$ □□□□□□ 2□

$a\ge 0$ □ $a=-1$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□ 1□

□3□□□□ $x>0$ □ $f(x)\le xe^{2x}$ □□□□

□□ $a\le e^{2x}-\dfrac{lnx+1}{x}$ □□□□

□ $h(x)=e^{2x}-\dfrac{lnx+1}{x}-2=\dfrac{xe^{2x}-lnx-1-2x}{x}$ □

□ $m(x)=xe^{2x}-lnx-1-2x$ □ $x>0$ □

$m'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}-\frac{1}{x}-2=(1+2x)(e^{2x}-\frac{1}{x})$□

□ $e^{2x}-\frac{1}{x}=0$ □□□ a □□□ $x>a$ □ $m'(x)$ □□□ $0<x<a$ □□ $m'(x)$ □□□

□□ $x=a$ □ $m(x)$ □□□□□ m □a□□

□ m □a□ $=ae^{2a}-lna-1-2a=1-lne^{2a}-1-2a=0$ □

□□ $h(x)\geq 0$ □□□□□□ $e^{2x}-\frac{lnx+1}{x}\geq 2$ □

□ $a\leq 2$ □□ a □□□□ $(-\infty$ □ $2]$ □

□□□□□□ $x>0$ □ $f(x)\leq xe^{2x}$ □□□□

□□ $a\leq e^{2x}-\frac{lnx+1}{x}$ □□□□

□ $e^{x}\geq x+1$ □ $(x=0$ □□□□□□

$x>0$ □□ $xe^{2x}=e^{lnx}e^{2x}=e^{lnx+2x}\geq lnx+2x+1$ □

□□ $e^{2x}\geq\frac{lnx+1}{x}+2$ □

□□ $e^{2x}-\frac{lnx+1}{x}\geq 2$ □□□ $lnx+2x=0$ □□□□□□

□ $a\leq 2$ □

12□□□□□ $f(x)=ln(x+1)-ax$ □

□1□□ $f(x)\leq 0$ □ $x\in[0$ □ $+\infty)$ □□□□□□□ a □□□□□□

□2□□ $x>0$ □□□□□ $(e^{x}-1)ln(x+1)>x^{2}$ □

□□□□□□1□□□ $f(x)=ln(x+1)-ax$ □

□□ $f'(x)=\frac{1}{x+1}-a$ □ $x\in[0$ □ $+\infty)$ □

□ $a\leq 0$ □□ $f'(x)>0$ □

□ $f(x)$ □ $[0$ □ $+\infty)$ □□□□□

□□ $f(x)\geq f(0)=0$ □□□□□

□ $0<a<1$ □□□ $f'(x)>0$ □□ $0\leq x<\frac{1}{a}-1$ □

□ $f(x)$ □ $[0$ □ $\frac{1}{a}-1)$ □□□□□

□□□□ $x_0\in(0,\frac{1}{a}-1)$ □□□ $f(x_0)>f(0)=0$ □□□□□

□ $a\geq 1$ □□□□ $0<\frac{1}{x+1}\leq 1$ □

□□ $f'(x)\leq 0$ □ $f(x)$ □ $[0$ □ $+\infty$ □□□□□

□□□□□□□ a □□□□□□ $[1$ □ $+\infty)$ □

□2□□□□□ $x>0$ □□ $e^x-1>0$ □□□ $(e^x-1)ln(x+1)>x^2$ □

□□□ $\frac{ln(x+1)}{x}>\frac{x}{e^x-1}$ □□□ $\frac{ln(x+1)}{x}>\frac{ln[(e^x-1)+1]}{e^x-1}(*)$ □

□ $g(x)=\frac{ln(x+1)}{x}(x>0)$ □□ $g'(x)=\frac{\frac{x}{x+1}-ln(x+1)}{x^2}$ □

□ $h(x)=\frac{x}{x+1}-ln(x+1)(x>0)$ □

□ $h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=-\frac{x}{(x+1)^2}<0$ □

□□ $g(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□ $(*)$ □□□□□□ $x<e^x-1(x>0)$ □

□ $\varphi(x)=e^x-x-1(x>0)$ □

□ $\varphi'(x)=e^x-1>0$ □

□□ $\varphi(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□□□□□ $x>0$ □ $\varphi(x)>\varphi(0)=0$ □□ $x<e^x-1$ □

□□□□□□□□

13□□□□□ $f(x)=a^x+b^x(a>0$ □ $b>0$ □ $a\ne1$ □ $b\ne1)$ □

□I□□ $a=2,b=\frac{1}{2}$ □□□□ $f(x)=2$ □□□

□II□□ $a=\frac{1}{3},b.3$ □□□ $g(x)=f(x)-2$ □□□ $b>3$ □□□ $x_0\in(-1,0)$ □□ $g(x_0)<0$ □□ $g(x)=0$ □□□□□□□□□□ b □□□

□□□□□□□I□□ $a=2,b=\frac{1}{2}$ □□ $f(x)=2^x+2^{-x}=2^x+\frac{1}{2^x}$ □

□ $f(x)=2$ □□ $2^x+\frac{1}{2^x}=2$ □ $\therefore(2^x)^2-2\times2^x+1=0$ □

□ $(2^x-1)^2=0$ □ $\therefore 2^x=1$ □

□□□ $x=0$ □

□Ⅱ□□1□□ $b=3$ □□ $g(x)=3^x+\frac{1}{3^x}-2..2-2=0$ □

□□□□ $\frac{1}{3^x}=3^x$ □ $x=0$ □□□□□

$\therefore x=0$ □ $g(x)$ □□□□□□□□□□□□

□2□□ $b>3$ □□ $g(x)=f(x)-2=(\frac{1}{3})^x+b^x-2$ □

□□ $x=0$ □ $g(x)$ □□□□□□

□ □ $b>3$ □□□ $x_0\in(-1,0)$ □□ $g(x_0)<0$ □□ $g(-2)>0$ □

$\therefore g(x)$ □ $(-2,x_0)$ □□□□□□□□

□□□ $g(x)$ □□2 □□□□□□□□□□

□□□□ $b=3$ □

14□□□□□ $a\neq 0$ □□□□ $f(x)=\frac{a}{x}-ln^2x$ □

□Ⅰ□□ $a\in(0$ □ $1]$ □ $x\in[\frac{1}{e}$ □ $+\infty)$ □□□□□ $f(x)..2a-\frac{x}{a}$ □

□Ⅱ□□ $f(x)$ □□□□□□ x_1 □ $x_2(x_1<x_2)$ □□□□ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-e^2(x_1+x_2)+2e>0$ □

□□□□□□□□Ⅰ□ $f(x)..2a-\frac{x}{a}$ □□□ $\frac{a}{x}-ln^2x-2a+\frac{x}{a}..0$ □□□ $\frac{x}{a^2}-\frac{ln^2x}{a}+\frac{1}{x}-2..0$ □

□ $u=\frac{1}{a}\in[1,+\infty)$ □□ $xu^2-(lnx)^2u+\frac{1}{x}-2..0$ □□ $y(u)=xu^2-(lnx)^2u+\frac{1}{x}-2(u..1)$ □□□□□ $u=\frac{(lnx)^2}{2x}=u(x)$ □

□ $u'(x)=\frac{2lnx-(lnx)^2}{2x^2}=\frac{(2-lnx)\cdot lnx}{2x^2}$ □

$\therefore x\in[\frac{1}{e},1)$ □□ $u'(x)<0$ □ $x\in(1,e^2)$ □□ $u'(x)>0$ □ $x\in(e^2$ □ $+\infty)$ □□ $u'(x)<0$ □

$\therefore u(x)$ □ $(1, e^2)$ □□□□□ $(e^2$ □ $+\infty)$ □□□□□ $u(e^2)=\frac{2}{e^2}<1$ □

$\therefore y(u)$ □ $[1$ □ $+\infty)$ □□□□

□□□□ y □1□ ≥ 0 □□□ $x-(lnx)^2+\frac{1}{x}-2\geq 0$ □□□ $(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2\geq(lnx)^2$ □

□ $F(x)=lnx-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ □□ $F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-x-1}{2x\sqrt{x}}=\frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}\leq 0$ □

$\therefore F(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□ F □1□ $=0$ □

$\therefore$ □ $x\geq 1$ □□ $F(x)\leq 0$ □□ $0<x<1$ □□ $F(x)>0$ □

□ $x\geq 1$ □□ $0\leq lnx\leq\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ □□ $0<x<1$ □□ $lnx>\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ □□ $(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2\geq(lnx)^2$ □□□

$\therefore$ □ $a\in(0$ □ $1]$ □ $x\in[\frac{1}{e},+\infty)$ □□ $f(x)\geq 2a-\frac{x}{a}$ □□□

□II□ $f'(x)=-\frac{a}{x^2}-\frac{2lnx}{x}=-\frac{2xlnx+a}{x^2}$ □

$f(x)$ □□□□□□□ x_1 □ $x_2(x_1<x_2)$ □ $\therefore \begin{cases}2x_1lnx_1+a=0\\2x_2lnx_2+a=0\end{cases}$ □

□ $g(x)=2xlnx$ □□ $g'(x)=2lnx+2$ □

□□□□ $x\in(0,\frac{1}{e})$ □□ $g'(x)<0$ □□ $x\in(\frac{1}{e},+\infty)$ □□ $g'(x)>0$ □

$\therefore g(x)$ □ $(0,\frac{1}{e})$ □□□□□ $(\frac{1}{e},+\infty)$ □□□□

$\therefore g(x)_{min}=g(\frac{1}{e})=-\frac{2}{e}, g(0)=g(1)=0$ □

□ $-a\in(-\frac{2}{e},0)$ □□ $a\in(0,\frac{2}{e})$ □

$\begin{cases}2x_1\ln x_1+a=0\\2x_2\ln x_2+a=0\end{cases}$ $\begin{cases}2\ln x_1=\frac{-a}{x_1}\\2\ln x_2=\frac{-a}{x_2}\end{cases}$

$\therefore 2(\ln x_1+\ln x_2)=-a(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})$ $x_1+x_2=\frac{2x_1x_2\ln(x_1x_2)}{-a}$

$2(\ln x_2-\ln x_1)=a(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})=\frac{a(x_2-x_1)}{x_1x_2}$ $\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}=\frac{a}{2x_1x_2}$

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{a}{x_1}-\ln^2x_1-\frac{a}{x_2}+\ln^2x_2=\ln^2x_2-\ln^2x_1+2\ln x_2-2\ln x_1=(\ln x_2-\ln x_1)(\ln x_1x_2+2)$

$x_1<x_2$ $0<x_1<\frac{1}{e}<x_2<1$ $x_1x_2<\frac{1}{e^2}$ $x_1<\frac{1}{x_2e^2}<\frac{1}{e}$ $g(x_1)>g(\frac{1}{x_2e^2})$

$g(x_1)=g(x_2)$ $\therefore$ $g(x_2)>g(\frac{1}{x_2e^2})$

$G(x)=g(x)-g(\frac{1}{xe^2})=x\ln x+\frac{1}{e^2x}\ln(e^2x),x\in(\frac{1}{e},1)$

$G'(x)=(\ln x+1)(1-\frac{1}{x^2e^2})>0$ $G(x)>G(\frac{1}{e})=0$

$\therefore g(x_2)>g(\frac{1}{x_2e^2})$ $x_1x_2<\frac{1}{e^2}$

$t=x_1x_2\in(0,\frac{1}{e^2})$ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-e^2(x_1+x_2)+2e$

$$=-a\cdot\frac{\ln(x_1x_2)+2}{2x_1x_2}+e^2\cdot\frac{2x_1x_2\ln(x_1x_2)}{a}+2e$$

$$>-\frac{2}{e}\cdot\frac{\ln(x_1x_2)+2}{2x_1x_2}+e^2\cdot\frac{2x_1x_2(\ln x_1x_2)}{\frac{2}{e}}+2e$$

$$=-\frac{\ln t+2}{et}+e^3t\ln t+2e$$

令 $h(t)=-\frac{lnt+2}{et}+e^{2}tlnt+2e$，则 $h'(t)=(1+lnt)(\frac{1}{et^{2}}+e^{2})$，

∴ $h(t)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上递减，

∴ $h(t)\geq h(\frac{1}{e})=0$，即 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-e^{2}(x_1+x_2)+2e>0$.

15.（1）求函数 $f(x)=xlnx-(1-x)ln(1-x)$ 在 $0<x\leq\frac{1}{2}$ 上的最大值;

（2）证明：不等式 $x^{1-x}+(1-x)^{x}\leq\sqrt{2}$ 在 $(0,1)$ 上恒成立.

【解答】（1）解：$f'(x)=lnx+ln(1-x)+2$，

令 $f'(x)=0$，解得：$x=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{e^{2}}}$（记为 x_0），

则 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减，在 $(x_0,\frac{1}{2}]$ 递增，

$x\to0^{+}$ 时，$f(x)\to0$，$f(\frac{1}{2})=0$，即 $xlnx-(1-x)ln(1-x)\leq0$，

∴ $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2}]$ 上的最大值是 0;

（2）证明：∵ $g(x)=x^{1-x}+(1-x)^{x}$ 满足：$g(x)=g(1-x)$，

∴ $g(x)$ 关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，

故只需证明：$x^{1-x}+(1-x)^{x}\leq\sqrt{2}$ 在 $(0,\frac{1}{2}]$ 恒成立，

而 $g'(x)=x^{1-x}(-lnx+\frac{1-x}{x})+(1-x)^{x}[ln(1-x)-\frac{x}{1-x}]$，

而 $g(\frac{1}{2})=\sqrt{2}$，只需证明 $g'(x)\geq0$，①在 $(0,\frac{1}{2}]$ 恒成立，

而 $-xlnx+1-x>0$，

即只需证明：$\frac{(1-x)^{1-x}}{x^{x}}\geq\frac{-(1-x)ln(1-x)+x}{-xlnx+1-x}$ ②，

□□□1□□□ $0<x\le\frac{1}{2}$ □□ $(1-x)^{1-x}\ge x^{x}$ □□ $\frac{(1-x)^{1-x}}{x^{x}}\ge 1$ ③□

□□②□□□□□□□ $\frac{-(1-x)\ln(1-x)+x}{-x\ln x+1-x}\le 1$ □ $(0$ □ $\frac{1}{2}]$ □□□□□

□□□ $\varphi(x)=x\ln x-(1-x)\ln(1-x)+2x-1\le 0$ ④□

□□1□□□ $x\ln x-(1-x)\ln(1-x)\le 0$ □□ $2x-1\le 0$ □

□□④□□□□

□□③④□□②□□□□

□①□□□□□□□□□□□□

16□□□□□ $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$ □ $f'(x)$ □ $f(x)$ □□□□□□□

□1□ $f'(x)$ □□□ $(-1,\frac{\pi}{2})$ □□□□□□□□□

□2□ $f(x)$ □□□□ 2 □□□□

□□□□□□□1□ $f(x)$ □□□□□ $(-1,+\infty)$ □

$f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$ □ $f''(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^{2}}$ □

□ $g(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^{2}}$ □□ $g'(x)=-\cos x-\frac{2}{(1+x)^{3}}<0$ □ $(-1,\frac{\pi}{2})$ □□□□

$\therefore f''(x)$ □ $(-1,\frac{\pi}{2})$ □□□□□□

□ $f''(0)=1$ □ $f''(\frac{\pi}{2})=-1+\frac{1}{(1+\frac{\pi}{2})^{2}}<-1+1=0$ □□□□□□□□□□□

□□ $f''(x)$ □ $(-1,\frac{\pi}{2})$ □□□□□□□□ x_0 □□□□□□□□□ $f'(x)$ □ $(-1,x_0)$ □□□□□□

□ $(x_0,\frac{\pi}{2})$ □□□□□□□□ $f'(x)$ □□□ $(-1,\frac{\pi}{2})$ □□□□□□□□□

□2□□□1□□□□ $x\in(-1,0)$ □□ $f'(x)$ □□□□□ $f'(x)<f'(0)=0$ □ $f(x)$ □□□□□

□ $x\in(0,x_0)$ □□ $f'(x)$ □□□□□ $f'(x)>f'(0)=0$ □ $f(x)$ □□□□□

□□ $f'(x)$ □ $(x_0$ □ $\frac{\pi}{2})$ □□□□□□□ $f'(x_0)>0$ □ $f'(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{1+\frac{\pi}{2}}<0$ □

□□□□□□□□□□□□□ $f'(x)$ □ $(x_0$ □ $\frac{\pi}{2})$ □□□□□□□ x_1 □□□□□□□□□□

□ $x\in(x_0$ □ $x_1)$ □□ $f'(x)$ □□□□□ $f'(x)>f'(x_1)=0$ □ $f(x)$ □□□□□

□ $x\in(x_1,\frac{\pi}{2})$ □□ $f'(x)$ □□□□□ $f'(x)<f'(x_1)=0$ □ $f(x)$ □□□□□

□ $x\in(\frac{\pi}{2}$ □ $\pi)$ □□ $\cos x<0$ □ $-\frac{1}{1+x}<0$ □□□ $f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}<0$ □ $f(x)$ □□□□□

□□ $f(\frac{\pi}{2})=1-\ln(1+\frac{\pi}{2})>1-\ln(1+\frac{3.2}{2})=1-\ln 2.6>1-\ln e=0$ □

$f(\pi)=-\ln(1+\pi)<-\ln 3<0$ □

□□□□□□□

x	$(-1,($	0	$(0,x$	x_1	$(x_1,\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\pi$	π
$f'(x$	-	0	+	0	-	-	-	-
$f(x)$	□□□□	0	□□□□	□□0	□□□□	□□0	□□□□	□□0

□□□□□□□□□□ $f(x)$ □ $(-1$ □ $\frac{\pi}{2}]$ □□□□□□□□□0□

□□□□□□□□□□□□□ $f(x)$ □ $(\frac{\pi}{2}$ □ $\pi)$ □□□□□□□□□ x_2 □

□ $x\in[\pi$ □ $+\infty)$ □□ $\sin x,1<\ln(1+x)$ □□ $f(x)=\sin x-\ln(1+x)<0$ □□□□

□□□□ $f(x)$ □ $[\pi$ □ $+\infty)$ □□□□□

□□□ $f(x)$ □□□2□□□□

学科网中小学资源库

扫码关注

可免费领取180套PPT教学模版

海量教育资源 一触即达

新鲜活动资讯 即时上线